

湖北民族大学

课程思政教学设计

教学单位：数学与统计学院

课程名称：数学分析 1

授课班级：0220405-06

单元一次课教学设计

单元名称	第二章 数列极限	授课小节	数列与数列极限
授课对象	20 级信息与计算科学	课时	2 学时（90min）
教学目标要求	1. 掌握数列极限的定义。 2. 掌握用数列极限的定义验证数列的极限。		
教学重点难点	重点：数列极限的定义。 难点：利用极限的定义验证数列的极限。		
教学方式方法手段	1. 教学方式方法以启发式讲授、互动式交流、案例实操分析为主。 2. 教学手段以启发式讲授与互动式交流相结合，QQ 群课堂相辅助。		
教学资源	课本、PPT、慕课资源。		
课程思政理念	在教学的合适环节中融入思政元素，主要思政内容包括： 1. 掌握刘徽用正多边形求圆周长的方法，“割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”，以及祖冲之在刘徽割圆术的基础上，将圆周率π的数值精确到 3.1415926 到 3.1415927 之间，这个结果比国外早了一千多年，增强学生自豪感，引导学生学习数学家精益求精的科学精神。 2. 在$\varepsilon-N$定义的讲解中融入哲学思想，加深学生对数学分析基本概念的理解。 3. 在无穷小教学中融入量变质变规律，引导学生注重量的积累，在学习和实践中就要作艰苦的量的积累工作，要有脚踏实地，埋头苦干的精神。 4. 在极限求解教学中融入主要矛盾次要矛盾，教育学生在想问题办事情的方法论上要善于抓重点、集中力量解决主要矛盾。		
学生自主学习设计	分组收集并交流古代中国数学家的事迹及对数学发展做出的重要贡献。		

(一) 板书设计

1. **数列**：按正整数编了号的一串数。

数列的例子 $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$, $\left\{\frac{n}{n+3}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$, $\left\{n \sin \frac{180^\circ}{n}\right\}$

注：数列中的数次序不能颠倒，重复出现的数不能随便舍去。

2: 数列极限的定义

定义 2.2.1 设 $\{x_n\}$ 是一给定数列， a 是一个实常数。如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，可以找到正整数 N ，使得当 $n > N$ 时，成立 $|x_n - a| < \varepsilon$ ，则称数列 $\{x_n\}$ **收敛于 a** （或 a 是数列 $\{x_n\}$ 的**极限**），记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

如果不存在实数 a ，使 $\{x_n\}$ 收敛于 a ，则称数列 $\{x_n\}$ **发散**。

注 1， ε 具有任意性

注 2， ε 既是任意的，又是给定的。因为只有当 ε 确定时，才能找到相应的正整数 N 。

注 3，数学表述：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N: |x_n - a| < \varepsilon.$$

3: 数列极限的例题

例 2.2.1 证明数列 $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 的极限为 1。

例 2.2.2 证明数列 $\left\{\frac{n^2+1}{2n^2-7n}\right\}$ 的极限为 $\frac{1}{2}$ 。

4: **无穷小量**：极限为 0 的数列（变量）称为**无穷小量**

例 2.2.3 证明数列 $\{q^n\}$, $|q| < 1$ 是无穷小量（极限为 0）。

注意特例：数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 是无穷小量。

例 2.2.4 证明数列 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right\}$ 均无穷小量。

例 2.2.5 证明数列 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right\}$ 不是无穷小量。

注：本例要用程序验证。

(二) 教学内容及时间安排

一、数列（5 分钟）

是指按正整数编了号的一串数：

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

通常表示成 $\{x_n\}$ ，其中 x_n 称为该数列的**通项**。

数列的例子：

$$\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}: 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \dots, 1 + \frac{(-1)^n}{n}, \dots;$$

$$\left\{\frac{n}{n+3}\right\}: \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \dots, \frac{n}{n+3}, \dots;$$

$$\left\{n \sin \frac{180^\circ}{n}\right\}: 0, 2 \sin 90^\circ, 3 \sin 60^\circ, 4 \sin 45^\circ, \dots, n \sin \frac{180^\circ}{n}, \dots,$$

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots;$$

$$\{n^2\}: 1, 4, 9, \dots, n^2, \dots;$$

$$\{(-1)^n\}: -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots.$$

注 尽管数列与数集的记号是类似的，但两者的概念是有区别的。在数集中，元素之间没有次序关系，所以重复出现的数看成是同一个元素；但在数列中，每一个数都有确定的编号，前后次序不能颠倒，重复出现的数不能随便舍去。

融入思政元素：

中国古代数学家早就具有朴素的极限思想。他们为了求圆周率 π （即圆的周长与直径之比），采用单位圆的内接正 n 边形的半周长 L_n ，所对应的数列为 $\{n \sin(180^\circ/n)\}$ 去逼近它。就如刘徽所说：“割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”

祖冲之在刘徽割圆术的基础上，将圆周率 π 的数值精确到 3.1415926 到 3.1415927 之间，这个数值比国外早了一千多年，增强学生民族自豪感。

二、数列极限的定义 (40min)

定义 2.2.1 设 $\{x_n\}$ 是一给定数列, a 是一个实常数。如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 可以找到正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 成立

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a (或 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限), 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

有时也记为

$$x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)。$$

如果不存在实数 a , 使 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 则称数列 $\{x_n\}$ 发散。

(1) 取以 a 为中心, ε 为半径的一个开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, 称它为点 a 的 ε 邻域, 记为 $O(a, \varepsilon)$:

$$O(a, \varepsilon) = \{x | a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}。$$

“当 $n > N$ 时, 成立 $|x_n - a| < \varepsilon$ ”表示数列中从 $N+1$ 项起的所有的项都落在点 a 的 ε 邻域中, 即

$$x_n \in O(a, \varepsilon), n > N。$$

由于 ε 具有任意性, 也就是说邻域 $O(a, \varepsilon)$ 的长度可以任意收缩。但不管收缩得多么小, 数列一定会从某一项起全部落在这个邻域中, 所以不难理解, a 必为这个数列的极限值。

(2) 在上述的定义中, ε 既是任意的, 又是给定的。因为只有当 ε 确定时, 才能找到相应的正整数 N 。

(3) 从极限的定义可知, 一个数列 $\{x_n\}$ 收敛与否, 收敛于哪个数, 与这一数列的前面有限项无关。也就是说, 改变数列前面的有限项, 不影响数列的收敛性。

以数列 $\{x_n\} = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 为例进行分析:

给定 $\varepsilon_1 = \frac{1}{10}$, $\exists N_1 = 11$, 当 $N > N_1$ 时, $|x_n - a| = \frac{1}{n} < \frac{1}{10}$;

给定 $\varepsilon_2 = \frac{1}{100}$, $\exists N_2 = 101$, 当 $N > N_2$ 时, $|x_n - a| = \frac{1}{n} < \frac{1}{100}$;

给定 $\varepsilon_3 = \frac{1}{1000}$, $\exists N_3 = 1001$, 当 $N > N_3$ 时, $|x_n - a| = \frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$;

.....

融入思政元素：

这是具体的认知数列极限的概念，由具体函数的具体 ε ，可得到具体的 N 。哲学中我们学过“**从具体到抽象**”是我们认识事物过程的第一个阶段。我们首先是凭借我们的感觉器官去认识事物，首先获得的是事物外在的现象的东西，这是认识的第一步，然后我们对多次认识到的、类似的事物**抽象整理**，就可以获得对事物的**内在的、本质的、规律性的认识**。在融入认知的哲学后，再给出数列的 $\varepsilon-N$ 定义，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N: |x_n - a| < \varepsilon。$$

所以数列极限数学定义的得出是**从具体到抽象的认知过程**，由具体数值的距离刻画到抽象的 ε 距离刻画，由具体数值的界限到抽象的 N 界限。这样分析的数列极限的概念，可以帮助学生更好的理解概念的数学语言刻画，使 $\varepsilon-N$ 定义不再是突兀的显现，而是自然的引入，让学生自然的理解接受。

例 2.2.1 证明数列 $\left\{\frac{n}{n+3}\right\}$ 的极限为1。

证 对任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，要使

$$\left|\frac{n}{n+3} - 1\right| = \frac{3}{n+3} < \varepsilon，$$

只须

$$n > \frac{3}{\varepsilon} - 3。$$

取 $N = \left[\frac{3}{\varepsilon}\right] + 1$ ，其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分，则当 $n > N$ 时，必有 $n > \frac{3}{\varepsilon} - 3$ ，于是成立

$$\left|\frac{n}{n+3} - 1\right| = \frac{3}{n+3} < \varepsilon。$$

显然，下面两数列

$$\{n^2\}: 1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$$

$$\{(-1)^n\}: -1, 1, -1, 1, \dots$$

是发散数列。

三、无穷小量（40 分钟）

极限为0的数列称为**无穷小量**，例如数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right\}$ 都是无穷小量。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \{x_n - a\} \text{ 是无穷小量。}$$

例 2.2.2 证明 $\{q^n\}$ ($0 < |q| < 1$) 是无穷小量。

证 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 要找正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 成立

$$|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon,$$

对上式两边取对数, 即得

$$n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}.$$

为保证 N 为正整数, 可取 $N = \max \left\{ \left\lceil \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} \right\rceil, 1 \right\}$, 则当 $n > N$ 时, 成立

$$|q^n - 0| = |q|^n < |q|^{\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}} = \varepsilon.$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, 即 $\{q^n\}$ 是无穷小量。

注 (1) 根据前面对数列极限的定义的讨论, 可以只考虑绝对值很小的 $\varepsilon > 0$, 不妨考虑任意给定的 $0 < \varepsilon < |q|$, 则 N 可取为 $\left\lceil \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} \right\rceil$, 当 $n > N$ 时, 成立 $|q^n - 0| < \varepsilon$ 。

注 (2) 根据数列极限的定义来证明某一数列收敛, 其关键是对任意给定的 $\varepsilon > 0$ 寻找正整数 N 。在上面的两例题中, N 都是通过解不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 而得出的。但在大多数情况下, 这个不等式并不容易解。实际上, 数列极限的定义并不要求取到最小的或最佳的正整数 N , 所以在证明中常常对 $|x_n - a|$ 适度地做一些放大处理, 这是一种常用的技巧。

例 2.2.3 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 7n} = \frac{1}{2}$ 。

证 首先有

$$\left| \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 7n} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{7n + 2}{2n(2n - 7)} \right|.$$

显然当 $n > 6$ 时,

$$\left| \frac{7n + 2}{2n(2n - 7)} \right| < \frac{8n}{2n^2} = \frac{4}{n},$$

于是, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \max \left\{ 6, \left\lceil \frac{4}{\varepsilon} \right\rceil \right\}$, 当 $n > N$ 时, 成立

$$\left| \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 7n} - \frac{1}{2} \right| < \frac{4}{n} < \varepsilon.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 7n} = \frac{1}{2}。$$

融入思政元素：

这类题型通用的方法是抓大放小。抓住变化最快的部分既次数最高的项，这些项对数列的极限起决定作用（**主要矛盾**），其它项对极限值的影响很小（**次要矛盾**）。在求解时，可以对不等式适当放大，放大过程中，主要对分子或分母中的非最高次项进行放大或缩小，但是，放大的次数不能超过分子或分母的次数，既不能把次要矛盾放大成主要矛盾来解决。教育学生在想问题办事情的方法论上也应当相应地有重点与非重点之分，要善于抓重点、集中力量解决主要矛盾。

例 2.2.4 证明数列 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right\}$ 均无穷小量。

证 首先有

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - 0 \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \right| < \frac{1}{n}。$$

于是，对任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$ ，当 $n > N$ 时，成立

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - 0 \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \right| < \frac{1}{n} < \varepsilon。$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 0。$$

课堂练习

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 0$$

一般地有：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_s n^s + a_{s-1} n^{s-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} 0, & s < t \\ \frac{a_s}{b_t}, & s = t \\ \infty, & s > t \end{cases}$$

无穷小量的性质

- (1) 有限个无穷小的代数和是无穷小。
- (2) 有界量与无穷小的乘积是无穷小。

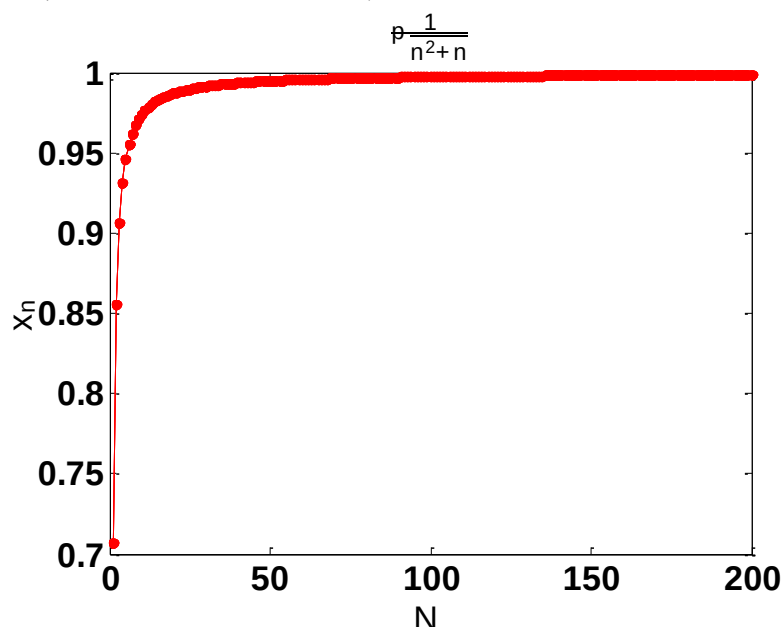
融入思政元素：

以提问的方式，无穷多个无穷小的和还是无穷小吗？引入量变与质变的关系，下面通过一个数学中的例子，说明量变质变的关系。

例 2.2.5 证明数列 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right\}$ 不是无穷小量。

首先注意：有限个无穷小的代数和是无穷小，无限个无穷小的代数和呢？不一定是无穷小量。

对数列的极限通过实验观察如图：



由此可以观察得到数列 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right\}$ 的极限为 1。

事实上：

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

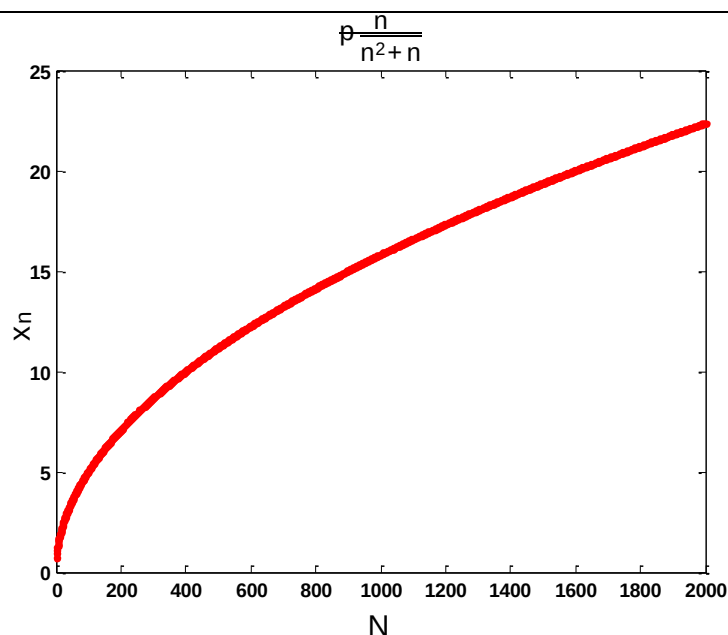
而数列

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$$

因此，由两面夹法则可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 1$$

进一步探究：数列 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^3+2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^3+n}} \right\}$ 会无限增大。



事实上，

$$\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^3+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^3+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^3+n}} < \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^3+1}}$$

而数列，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^3+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^3+n}} = \infty$$

因此，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^3+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^3+n}} = \infty$$

融入思政元素：

量变引起质变。并不是量变就能引起质变（有限各无穷小累计的和依然是无穷小），而是量变发展到一定的程度时（无穷多个无穷小的和不一定是无穷小，可以为任何值），事物内部的**主要矛盾运动形式**发生了改变，进而才能引发质变。

引导学生要**重视量的积累**；任何事物的发展都必须首先从量变开始，没有一定程度的量的积累，就不可能有事物性质的变化，就不可能实现事物的飞跃和发展。既然量变是质变的必要准备，质变依赖于量变，那么**在学习和实践中就必须首先作艰苦的量的积累工作**，要有脚踏实地，埋头苦干的精神，要一点一滴地做细小的事情，反对急于求成，立竿见影，揠苗助长，须知欲速则不达的道理。

	四 教学延伸（5 分钟） 1 知识总结，极限的定义，无穷小的定义，无穷小的性质，用定义验证某个确定的数是数列的极限。 2 知识难点及对策分析，本次课的难点在于对极限定义的理解及掌握，要从学生思政的角度引导学生重视知识的积累，要脚踏实地做一定的练习（会有课后作业），达到融会贯通的效果。 3 课后思政：收集新中国成立至今国内著名数学家对数学发展做出的重要贡献，开展小知识，大道理学生讲堂，请学生自己讲述数学知识中蕴含的人生哲理。
教 学 后 记	1、在教法方面，主要采用由浅入深、由简到繁、由具体到抽象的方式，不断深化问题。注重在教学过程中融入思政教育，达到学生既能掌握教材的基本知识点，又能在潜移默化中受到德育教育。本次授课绝不刻意牵强融入“思政元素”，将教师和学生心灵中的价值共鸣作为追求的目标，个人努力做到一次心灵的唤醒，终身为核心价值践行。 2、在学法方面，对于容易出错的极限的写法方面，通过学生课堂练习，教师在课堂上及时发现并纠正学生出现错误，加深印象。多年的教学表明，$\varepsilon-N$ 定义的学习是学生较难掌握的知识点，合理融入课程思政，在方法论上，能对学生起到积极的引导作用。 3、在教学重建方面：本次教学感悟有三点：首先、教师要深入钻研教材，积极融汇各类学科知识，从不同的侧面对学生进行讲授，融合思政教学，让课堂更加丰满，注入灵魂和力量。其次、学生都有积极向上的愿望，教师应该抓住每次机会，去鼓励学生，激发他们的进取精神。最后，学生是课堂的主导者，让学生掌握知识的教学才是有意义的教学，必须在教学过程中把控学生的实际，润物无声，让学生快乐学习，主动作为。