

任意项级数的黎曼重排定理

赵远安 数学与统计学院

引言

黎曼重排定理是数学分析中级数理论的核心内容，揭示了条件收敛级数的特殊性质：通过调整项的顺序可收敛于任意实数或发散。传统教学中，该定理因抽象性强、逻辑复杂，学生常难以直观理解。

1. 课程思政：结合数学史（黎曼的科学探索精神）与哲学思维（有序与无序的辩证关系），引导学生感悟严谨治学的科学态度。

2. 技术赋能：利用 Deepseek 工具生成动态图/视频，可视化级数重排过程，突破传统板书局限，提升课堂互动性与知识吸收效率。

3. 跨学科融合：通过“人工智能+数学”模式，培养学生数字化思维与创新能力。

一、课程基本信息

《数学分析（2）》是一门面向统计学专业本科一年级下学期学生开设的专业核心必修理论课程，课程学分为 6.5 分。

二、课程教学整体设计思路

1. 课程思政融入路径

科学精神：通过黎曼的生平与贡献，强调科学研究需兼具创新与严谨性。

辩证思维：以“条件收敛级数的有序性可被打破”为例，探讨数学中“确定性与不确定性”的哲学内涵。

2. “人工智能+”技术应用

Deepseek 动态图设计：展示条件收敛级数（如交错调和级数）的项重排过程，动态呈现部分和随项序变化趋势。模拟极端情况（如收敛于任意指定值或发散），直观体现定理结论。

三、案例教学目标

知识：理解黎曼重排定理的条件与结论，掌握其证明的核心思路。

能力：能利用 Deepseek 工具分析级数重排现象，提升数学建模与可视化表达能力。

素质：培养科学探索精神、批判性思维及数字化工具应用能力。

四、案例教学实施过程

1. 课前准备

学生任务：复习级数收敛性分类（绝对收敛、条件收敛、发散），完成预习习题：

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的收敛类型，并说明理由。

思考题：“若级数收敛但非绝对收敛，其项的顺序是否影响求和结果？”

教师准备：

（1）创建交错调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的重排过程动态演示：按原顺序求和，部分和收敛至 $\ln 2$ ；调整项顺序，使部分和收敛至 $\frac{1}{2}$ ；极端重排导致部分和发散。

（2）标注关键步骤：正项/负项选择、累加策略、部分和波动趋势。

（3）思政素材整理：黎曼手稿图片等与级数理论的关联性资料。中国数学家陈省身语录：“数学的本质是自由与创造。”

2. 课堂教学（45 分钟）

【问题导入与直观演示】（5 分钟）

提问互动：“绝对收敛级数重排后是否改变和？条件收敛级数是否具有相同性质？”

学生回答后，播放 Deepseek 动态图：绝对收敛级数重排后部分和曲线不变。交错调和级数重排后部分和曲线剧烈波动。

结论引出：“条件收敛级数的和依赖于项的顺序——此为黎曼重排定理的核心。”

【定理陈述与证明详解】（20 分钟）

（1）定理形式化陈述（PPT）

黎曼重排定理：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛，则对任意给定的 $a, -\infty \leq a \leq +\infty$ ，必定

存在 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的更序级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} x'_n = a.$$

(2) 证明思路分解（结合动态图）

条件收敛的结构分析：设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = -\infty$, (正项与负项各自发散)。

动态图演示：分离正负项子列，展示其发散趋势（如正项累加至 100、200、500 等）。

构造目标级数的策略：对任意 a ，通过交替累加正项与负项逼近 a 。

具体操作：先累加正项直至部分和首次超过 a ；加入负项直至部分和首次低于 a ；重复上述过程，使部分和在 a 附近振荡并收敛于 a 。

动态图演示：输入 $a = 0.5$ ，动态展示正负项交替累加过程（红点标记部分和跨越 a 的临界点）。

严格性补充：由于正负项均发散，上述操作可持续进行；级数项趋于零（因原级数收敛），保证部分和振荡幅度衰减至零。

(3) 哲学与思政渗透

讨论题：“数学中的‘确定’（定理结论）与‘不确定’（重排自由）如何共存？”

条件收敛级数的脆弱性警示我们：科学结论的成立需严格满足前提；黎曼突破绝对收敛的思维定式，启示创新需打破传统框架。

【技术实操与探究】（15 分钟）

Deepseek 平台操作任务：学生登录 Deepseek 网页端，选择预设级数（如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ）。

任务 1：输入目标值 $a=1$ ，生成重排方案，观察部分和收敛过程。

任务 2：尝试构造发散的重排序列，记录部分和震荡幅度变化。

【总结与课后任务】（5 分钟）

定理总结：条件收敛级数的重排不稳定性；

证明核心：正负项发散的矛盾性与项趋于零的结合；

思政升华：播放黎曼生平短片（1 分钟），强调其“大胆假设，严谨求证”的科研精神。

课后任务：撰写报告：“从黎曼重排定理看科学探索中的自由与约束”（结合技术实操截图）。

拓展思考：“是否存在无限种重排方式使级数收敛于同一值？证明你的猜想。”

3. 教学评估

（1）课堂即时检测

题目：“若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 条件收敛，能否通过重排使其收敛于 -100？简述理由。”

预期答案：能，因黎曼定理保证对任意实数存在对应重排。

（2）动态图分析报告评分标准

技术应用：正确使用 Deepseek 生成至少两种重排方案；

数学严谨性：合理解释重排策略与收敛性关系。

五、教学效果及反思

1. 教学效果

预期能提升学生课堂参与度；技术工具显著降低了理解难度。

2. 存在问题与改进

问题：学生对 AI 工具的使用不熟练。

改进：增加课前技术指导微课，提供简化版操作手册。